Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ / В. М. Левчук
"____" __________ 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУПОЛЕВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРУППУ АВТОМОРФИЗМОВ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
кандидат физико–математических наук,
доцент ___________ / О. В. Кравцова

Выпускник __________ / Т. В. Моисеенкова

Красноярск 2019

АННОТАЦИЯ

Цель работы – построение матричного представления регулярного множества конечной полуполевой проективной плоскости в предположении, что ее группа линейных автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3, нахождение примеров таких плоскостей.

Вид регулярного множества описан в теоремах 1, 3; теорема 2 описывает исключительный случай, плоскость порядка 3^{2n}; также в работе перечисляются примеры плоскостей минимальных порядков 16 и 625.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, регулярное множество, бэровская инволюция, изоморфизм, автотопизм, группа коллинеаций, симметрическая группа.

ANNOTATION

Our goal is to construct the spread set matrix representation for a finite semifield projective plane whose linear autotopism group contains a subgroup isomorphic to the symmetric group S_3. Also we must to present the examples of the planes with such condition.

We described the spread set in the theorems 1 and 3; the theorem 2 is the description of an exceptional case (the plane of order 3^{2n}). The examples in the case of minimal possible order 16 and 625 are given.

Keywords: semifield plane, spread set, Baer involution, isomorphism, autotopism, collineation group, symmetric group.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Для точек и прямых конечной проективной плоскости можно ввести систему координат с использованием элементов некоторого координатизирующего множества. Свойства отношения инцидентности в проективной плоскости позволяют ввести на координатизирующем множестве операции сложения и умножения. Алгебраические свойства координатизирующего множества тесно связаны с геометрическими свойствами соответствующей проективной плоскости. Так, в частности, классическая, или дезаргова проективная плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций – квазиполем.

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Особенности строения кординатизирующего множества приводят к ряду вопросов, связанных со строением полной группы коллинеаций полуполевых плоскостей. Наиболее известна гипотеза [1] о разрешимости полной группы автоморфизмов (коллинеаций) всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка. К настоящему времени эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей (например, [2]).

Известен способ задания полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет алгебраические свойства кординатизирующено полуполя и геометрические свойства полуполевой плоскости, в том числе строение группы коллинеаций. Таким образом, представляет интерес как задача исследования группы коллинеаций при известном представлении регулярного множества, так и обратная задача – построение конечных проективных плоскостей по известным ограничениям на группу коллинеаций (например, [3]).

Симметрическая группа S_3 является некоммутативной группой минимального порядка, ее наличие в группе коллинеаций проективной плоскости и в группе автоморфизмов координатизирующего множества может указывать на наличие особенных свойств. Так, среди всех 23 неизоморфных полуполей порядка 16 ровно одно имеет группу автоморфизмов, изоморфную S_3. Таким же свойством обладает исключительное полуполе Хентзела–Ру́а порядка 64, не являющееся ни лево-, ни правопримитивным ([4], [5]).

В главе 1 приводятся основные пределения, связанные с полуполевыми плоскостями, регулярным множеством и группой коллинеаций.

В главе 2 рассматривается задача построения матричного представления регулярного множества конечной полуполевой плоскости порядка q^2 с ядром $GF(q)$ ($q = p^n$, p –простое число) в предположении, что ее группа автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3.

В главе 3 решается задача построения (в том числе с использованием компьютерной техники) примеров таких плоскостей порядков 16 и 625.

[изъято 33 страницы]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации получены следующие результаты.

Построено матричное представление регулярного множества конечной полуполевой проективной плоскости порядка p^{2n} с ядром $GF(p^n)$ (p – простое) в предположении, что ее группа линейных автотопизмов содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3, рассмотрены все случаи: $p = 2$ (теорема 1) $p = 3$ (теорема 2), $p > 3$ (теорема 3).

Найдены, в том числе с помощью компьютера и написанных на языке языке Pascal программ, примеры таких плоскостей минимальных порядков 16 и 625.

Основные результаты исследования были представлены в сборниках:

1. Тезисы докладов международной алгебраической конференции посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва 2018).

2. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза (Тула 2019).

Все основные результаты являются новыми, носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейших исследований полуполевых проективных плоскостей. В частности, возможны обобщения для ранга более двух. Метод, разработанный в диссертации, может быть применен и для других подгрупп автотопизмов известного строения.

Список использованных источников

1. Hughes, D. R., Piper, F. C. Projective planes / D. R. Hughes, F. C. Piper, – Springer–Verlag New–York Inc, 1973. – 324 p.

2. Подуфалов, Н. Д. О полуполевых плоскостях порядка 162 / Н. Д. Подуфалов, Б. К. Дураков, О. В. Кравцова, Е. Б. Дураков // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т.37, №3 – С. 616–623.

3. Biliotti, M. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 / M. Biliotti, V. Jha, N. L. Johnson, G. Menichetti // Geom. Dedicata. – 1989.– Vol. 29. – P. 7–43.

4. Hentzel, I. R. Primitivity of Finite Semifields with 64 and 81 elements / I. R. Hentzel, I. F. Rúa// International Journal of Algebra and Computation. – 2007. – Vol. 17, № 7. – P. 1411–1429.

5. Levchuk, V. M. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes / V. M. Levchuk, O. V. Kravtsova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, № 4. – P. 688–698.

6. Podufalov, N. D. On spread sets and collineations of projective planes / N. D. Podufalov // Contem. Math. – 1992. – Vol. 131, part 1. – P. 697-–705.

7. Vaughan, T. P. Polynomials and linear transformations over finite fields / T. P. Vaughan // J. Reine Angew. Math. – 1974. – Vol. 262. – P. 179–206.

8. Кравцова, О. В. Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию / О. В. Кравцова // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". – 2013 – Т. 6, № 2 – С. 26–37.

9. Кравцова, О. В. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4 / О. В. Кравцова // Известия вузов. Математика. – 2016 – № 9 – С. 10–25.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ В. М. Левчук
“ 19 ” июня 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУПОЛЕВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРУППУ АВТОМОРФИЗМОВ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная математика

Научный руководитель
кандидат физико–математических наук,
доцент ________ / О. В. Кравцова

Выпускник ________ / Т. В. Моисеенкова

Красноярск 2019